

SÉRIES DE FOURIER

Deux niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : parties 1 et 2.
- Piste rouge : tout le devoir.

On note $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Je vous laisse deviner seuls le sens des notations $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1 EN ROUTE POUR LES COEFFICIENTS DE FOURIER

- 1) a) Calculer $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- b) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On pose $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f , alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

À présent, soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ est appelé le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f . On pose ensuite $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. La suite de fonctions $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la série de Fourier de f .

Au départ, rien ne garantit que la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} , ni bien sûr qu'elle converge vers f , et encore moins que la convergence est uniforme ! D'ailleurs, ce n'est pas vrai en général.

- 2) On note f_1 la fonction 2π -périodique définie par la relation $f_1(x) = \pi - x$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $S_n(f_1)(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

On montre de même, en notant f_2 la fonction 2π -périodique définie par la relation $f_2(x) = |x|$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$, que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $S_{2n+1}(f_2)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$.

- 3) Soient a et b des réels pour lesquels $a \leq b$.

a) Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$: $\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \pm\infty} 0$.

b) En déduire que le résultat reste vrai de toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ (lemme de Riemann-Lebesgue).

En particulier, pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: $\hat{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$

2 LE THÉORÈME DE DIRICHLET

- 4) On pose $D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $D_n(x)$ comme un quotient de sinus pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Calculer $\int_0^\pi D_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 5) Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}$ fixé. On suppose f dérivable en x .

a) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $S_n(f)(x) = \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$.

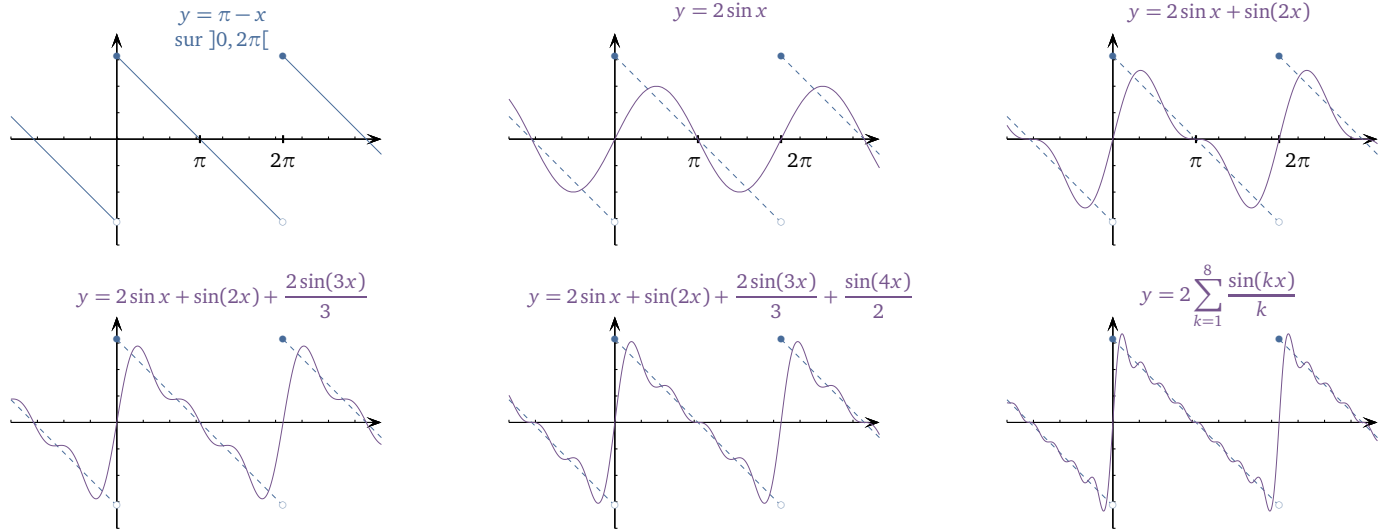
b) Montrer que $t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{\sin \frac{t}{2}}$, définie sur $]0, \pi]$, peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi]$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(t) \sin \frac{(2n+1)t}{2} dt$, puis que :

$$S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) \quad (\text{théorème de Dirichlet}), \quad \text{i.e. que } \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

6) Montrer que pour tout $x \in]0, 2\pi[$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$. Qu'en déduit-on pour $x = \frac{\pi}{2}$?

On montre de même que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi(\pi - 2|x|)}{8}$. Et pour $x = 0$?



3 INJECTIVITÉ DE L'APPLICATION « COEFFICIENTS DE FOURIER »

7) Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que f est réelle et continue en 0.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$: $\int_{-\pi}^\pi f(t) (\cos t + 2\varepsilon)^n dt = 0$.

On suppose à présent par l'absurde que $f(0) > 0$. Par continuité de f en 0, il existe un réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ pour lequel pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$: $f(x) \geq \frac{f(0)}{2}$.

b) Justifier l'existence de deux réels $\varepsilon > 0$ et $\beta \in]0, \alpha]$ pour lesquels : $\forall x \in [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi], |\cos x + 2\varepsilon| \leq 1 - \varepsilon$ et $\forall x \in [-\beta, \beta], \cos x \geq 1 - \varepsilon$.

c) En déduire que $\int_{-\pi}^\pi f(t) (\cos t + 2\varepsilon)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, puis que $f(0) = 0$.

8) Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que f est continue en 0. Que valent les coefficients de Fourier de la fonction conjuguée \overline{f} ? En déduire que $f(0) = 0$.

9) Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors f est nulle sur $[0, 2\pi[$ privé d'un nombre fini de points. Sur quel ensemble de fonctions l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est-elle injective ?

10) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que si la suite de fonctions $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R} , c'est forcément vers f .

11) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

a) Exprimer $\widehat{f''}(n)$ en fonction de $\widehat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} , puis qu'elle converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .